

# 基于 Biharmonic 样条插值的 图像渐变算法及实现

王亚涛 董兰芳 倪奎

(中国科学技术大学计算机科学技术系, 合肥 230027)

**摘要** 图像变形是计算机动画的重要技术之一。本文提出一种图像变形方法,利用 Biharmonic 样条曲面插值实现空间映射,采用后向映射和双线性插值进行图像重采样。在图像变形基础上结合图像融合技术实现了图像渐变。该方法使用灵活,操作者可以简单地改变特征点的数量和位置以控制变形细节而无需其他操作。实验结果表明,该方法产生的过渡图像平滑、自然,每幅变形图像边界稳定且有良好的可视性。

**关键词** Biharmonic 样条 图像变形 后向映射 双线性插值 图像渐变

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2007)12-2189-06

## Image Morphing Algorithm Based on Biharmonic Spline Interpolation and Its Implementation

WANG Ya-tao, DONG Lan-fang, NI Kui

(Department of Computer Science and Technology, University of Science and Technology of China, Hefei 230027)

**Abstract** Image warping is an important technique in the field of computer animation. This paper presented a method to implement it. In this method, surface interpolation based on Biharmonic spline was used for image spatial mapping. By using inverse mapping and bi-linear interpolation to implement image resampling and combining image's cross-dissolve, we completed image morphing. Due to the flexibility of this method, animators can easily adjust the numbers or positions of feature points to control the detail of warping without other operations. Experiments show that this approach can produce fluid and natural transition image. Besides, every warped image has both stable image boundary and good visibility.

**Keywords** Biharmonic spline, image warping, inverse mapping, bi-linear interpolation, image morphing

## 1 引言

图像变形技术(image warping)是近年来图像处理领域中的一个新的分支,是对给定的一幅图像进行几何位置上的变换,能产生一些有趣的视觉效果,在影视娱乐、广告设计中常用来产生特技。在人脸动画中,可以利用图像变形技术对人脸进行变形而产生各种各样的说话者口型以及丰富的表情。建立在图像变形基础之上的图像渐变(image

morphing)指的是给定两幅图像(源图像和目标图像),产生一系列的中间图像以实现源图像到目标图像的平滑过渡,图像渐变不仅要求过渡的平滑性,还要求中间过渡图像本身的可视性,这就要求图像变形技术与图像融合技术的结合。

在图像变形中,空间映射是核心,据此可将图像变形技术大致分为3类:(1)基于块的变形<sup>[1-3]</sup>,典型的算法有2次网状变形算法和基于三角剖分的变形算法。他们的共同思想是将整幅图像分成若干块,从而将整幅图像的变形用每一小块的变形的结

收稿日期:2006-05-26;改回日期:2006-09-05

第一作者简介:王亚涛(1981~),男。现为中国科技大学计算机科学与技术系硕士研究生。主要研究方向为图像处理、机器视觉。

E-mail: ythwang@mail.ustc.edu.cn

合来实现。这类算法的显著优点是变形速度快,但是将图像分成小块这一预处理工作比较繁琐,而分块的合理有效性直接影响了最终的变形效果。

(2) 基于线的变形<sup>[4]</sup>。这种算法的思想是在图像上构造一系列的特征线,图像上每个像素的偏移量由该像素与这些特征线的距离的综合来决定。这种方法仍然存在变形速度较慢的问题,且不太直观。

(3) 基于点的变形,典型的算法是基于径向基函数的变形算法<sup>[5-7]</sup>。这种算法的主要思想是将图像看成是众多散乱的点构成,通过指定一些特殊点的空间映射关系和某种合适的径向基函数来完成图像上所有点的空间映射。这种算法比较直观,但是由于径向基函数一般为高斯函数等较为复杂的函数,故变形速度很慢,此外,这种算法难以保证变形图像的的稳定边界。以上方法所共有的缺点就是依赖于特征点的数量以及分布,一旦特征点有所改动,算法就会有较大的调整,不利于对变形效果进行微调。

本文提出的基于 Biharmonic 样条<sup>[8]</sup>曲面插值的图像变形算法属于上述第 3 类,但该算法与基于径向基函数的显著差异在于,后者要求得到径向基函数的显式表达式而本文算法无需构造显式的变形函数,直接采用 Biharmonic 样条曲面插值技术实现图像空间坐标的映射。Biharmonic 样条构造的曲面整体平滑且局部性能较好,较适用于图像变形。基于 Biharmonic 样条的图像变形方法最大的优点在于变形控制的灵活性,操作者可以方便地增加特征点的数量或者调整特征点的位置,而达到局部精确的变形效果。此外,对特征点的调整不会影响到算法的其他步骤。

## 2 Biharmonic 样条曲面插值及实现

常见的曲面插值技术主要有双 3 次样条插值和 B 样条插值等,这些插值技术或是要求控制点均匀分布在网格上或是计算量太大,使用较为不便。本文引入了基于 Biharmonic 样条的曲面插值技术,该插值方法整体平滑且局部性能较好,更重要的是该方法对控制点的分布和数量没有要求。用于图像变形时,操作者可以方便地通过调整特征点来调整变形图像的细腻程度。

### 2.1 Biharmonic 样条插值原理<sup>[8]</sup>

Biharmonic 样条可以对散乱分布的 1 维(2 维)数据进行曲线(曲面)插值。插值产生的曲线(曲面)是以各数据点为中心的 Green 函数的线性组合。该方法既可利用各点的数值又可利用斜率产生插值曲面,由于插值曲线(曲面)满足 Biharmonic 方程,因此插值产生的曲线(曲面)具有最小曲率。Biharmonic 方程在不同维空间中的解就是不同维的 Green 函数。

对于  $m$  维空间中散乱分布的  $N$  个控制点  $P_i$ ,  $i = 1 \sim N$ , Biharmonic 样条  $m$  维插值问题转化为方程组(1)的求解

$$\begin{aligned} \nabla^4 w(\mathbf{P}) &= \sum_{i=1}^N a_i \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}_i) \\ w(\mathbf{P}_i) &= w_i \end{aligned} \tag{1}$$

其中,  $\nabla^4$  为 Biharmonic 算子,  $\delta(\mathbf{P})$  为单位冲击函数。 $\mathbf{P}$  是  $m$  维空间中的一个位置,  $w(\mathbf{P})$  表示位置  $\mathbf{P}$  处的值。满足(1)的通解为

$$w(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_m(\mathbf{P} - \mathbf{P}_j) \tag{2}$$

其中,系数  $a_j$  满足线性方程组(3):

$$w_i = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_m(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j) \tag{3}$$

$\varphi_m(\mathbf{P})$  为  $m$  维 Green 函数,  $m$  维 Green 函数表达式如表 1 所示。

表 1  $m$  维 Green 函数

Tab. 1  $m$ -direction Green functions

维数	Green 函数 $\varphi_m(\mathbf{P})$
1	$ \mathbf{P} ^3$
2	$ \mathbf{P} ^2(\ln \mathbf{P} -1)$
3	$ \mathbf{P} $
4	$\ln \mathbf{P} $
5	$ \mathbf{P} ^{-1}$
$m \geq 6$	$ \mathbf{P} ^{4-m}$

### 2.2 基于 Biharmonic 样条的曲面插值算法实现

基于 Biharmonic 样条曲面插值技术可对散乱分布在 2 维平面中的数据点(对数据点的分布和数量均无要求)进行插值,这些数据点称为控制点,而这些控制点所在网格上的其他点称为非控制点,或称为待插值点。曲面插值就是在已知一些控制点处的值的条件下,插值产生其他大量非控制点处的值,用插值的方法对曲面进行模拟。基于 Biharmonic 样条

曲面插值算法描述如下:

**算法输入:**  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  3 个列向量,  $XI$  和  $YI$  两个矩阵。

其中, 向量  $X$  和  $Y$  分别存储各个散乱控制点的  $x$  和  $y$  坐标值,  $Z$  向量存储控制点位置的值。这 3 个向量长度相同。  $XI$ 、 $YI$  矩阵为两个常数矩阵, 分别表示待插值的平面网格上各点的  $x$  和  $y$  坐标值, 共同表示一个 2 维坐标。这两个矩阵大小相同。

**算法输出:**  $ZI$  矩阵, 表示插值后得到的平面网格处的值。

**算法步骤:**

(1) 求控制点之间的距离复矩阵  $D$

① 用  $X$ 、 $Y$  向量初始化  $D$

将  $X$  向量作为  $D$  矩阵每一列的实部; 将  $Y$  向量作为  $D$  矩阵每一列的虚部。

② 利用式 (4) 重新计算

$$D = |D - D^T| \quad (4)$$

其中,  $D^T$  表示  $D$  的转置矩阵。

③ 将  $D$  矩阵对角线元素赋值为 1

(2) 求插值权重向量  $WEIGHTS$

① 利用式 (5) 计算临时矩阵

$$G = D^2 \times (\log(D) - 1) \quad (5)$$

② 将  $G$  对角线元素置 0

③ 利用式 (6) 计算权重向量

$$WEIGHTS = G^{-1} \times Z^T \quad (6)$$

其中,  $G^{-1}$  表示  $G$  的逆矩阵。

(3) 求网格点处的值  $ZI$  矩阵

for 任意网格点  $(i, j)$  do

① 用  $xi_{i,j}$  的值构造列向量  $XX$ ;

用  $yi_{i,j}$  的值构造列向量  $YY$ 。

② 利用式 (7) 计算临时向量  $DE$ , 并将其中零元素赋值为 1, 记下零元素位置 location。

$$DE = \sqrt{(XX - X)^2 + (YY - Y)^2} \quad (7)$$

③ 利用式 (8) 计算临时向量  $GREEN$ , 并将 location 位置元素赋值为 1。

$$GREEN = DE^2 \times (\log(DE) - 1) \quad (8)$$

④ 利用式 (9) 计算任意网格点处的值

$$zi_{i,j} = GREEN \times WEIGHTS \quad (9)$$

### 3 基于 Biharmonic 样条曲面插值的图像变形技术

图像变形的实质是实现源图像中任意坐标向目

标图像映射。其映射方式可以分为前向映射和后向映射, 前向映射是指将源图像中各像素映射到目标图像中去。而后向映射恰好与前向映射的方向相反, 即从目标图像到源图像。假设源图像中像素坐标为  $(x, y)$ , 目标图像中像素坐标为  $(u, v)$ , 两种映射方式如图 1 所示。

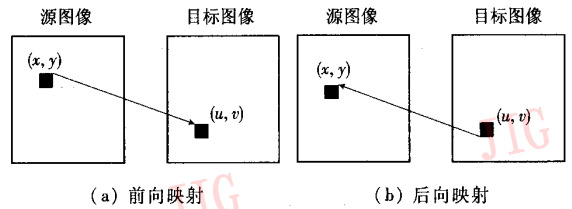


图 1 两种映射方式示意图

Fig. 1 Two mapping ways

由于映射可能为多对一 (即源图像中的多个点经映射后为一个点), 前向映射在实现时必然存在两个问题, 一个是会产生孔洞现象, 另一个是会出现重叠现象, 为了避免这些问题, 在映射过程中必须采取一些措施, 如相交检测, 非均匀采样等, 但是开销比较大。而后向映射能很好地解决这些问题且实现简单 (只需交换源图像和目标图像即可), 本文采用后向映射方式。为了讨论方便, 以下仍用前向映射的方式讨论像素点的映射方法。式 (10) 为映射的二元函数描述。

$$\begin{aligned} u &= f(x, y) \\ v &= g(x, y) \end{aligned} \quad (10)$$

式 (10) 所描述的两个函数便利用 Biharmonic 样条曲面插值来模拟实现, 已知少量控制点处的值, 进行插值的是大量的非控制点。基于散乱点插值的图像变形主要分为以下 3 步: (1) 特征点选择; (2) 空间映射; (3) 灰度插值。

#### 3.1 特征点选择

在源图像和目标图像上选择对应的特征点, 这些特征点的选择要求能体现出两幅图像的差异, 若只是局部的变形, 则要求在变形程度很小或者完全不变形的区域适量选取特征点, 这些特征点尽量要求匹配。此外, 为了稳定变形图像的边界, 还应该在图像的边界上选取一些辅助控制点。

#### 3.2 基于散乱点插值的空间映射

特征点选定后, 便指定了特征点之间位置的映射关系, 而其余大量的非特征点的映射关系则需要利用曲面插值算法得到。

算法实现时,源图像特征点的  $x, y$  坐标分别构成向量  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ 。而与之相对应的在目标图像中的  $u$  或  $v$  坐标构成向量  $\mathbf{Z}$ 。再根据图像的实际大小,产生图像坐标常数坐标矩阵  $\mathbf{X}\mathbf{I}$  和  $\mathbf{Y}\mathbf{I}$ , 根据 2.2 节算法,独立运算两次可以得到变形图像各像素点的  $u$  和  $v$  坐标,从而实现了各像素点的空间映射。

### 3.3 灰度插值

在完成空间映射以后,只需将映射表中指定位置处的源图像灰度值赋值到目标图像当中即可。但由于图像中各像素坐标为整数,而映射函数的输出一般为实数,所以图像变形过程存在图像的重采样问题,即对非整数点的像素值用它周围整数点处的像素值来计算,也叫灰度插值。经过对插值效果和运算量的折衷考虑,本文采用双线性插值的方法。

在完成以上 3 步之后,图像变形得以实现。

## 4 图像渐变

图像变形技术作用在一幅图像上的效果是图像的几何扭曲,而作用在两幅或多幅图像上时,可以实现图像间特征的对准。因此,在实现图像变形的基础上,分别对两幅图像进行两个方向的变形(源图像到目标图像、目标图像到源图像),再对两幅变形图像进行图像灰度融合,就可产生一系列的中间图像,从而实现图像的平滑渐变。本文实现的图像渐变采用线性过渡过程(可根据实际需要改为指数或对数特性的过渡过程),而图像融合时两幅变形图像灰度值的权重也与渐变的控制时间相关,总体上渐变的效果为慢-快-慢的过程。图像渐变的实现过程如图 2 所示。

(1) 对源图像和目标图像进行特征点选择,分别产生源控制点  $P_s$  和目标控制点  $P_t$ 。

(2) 由  $P_s$  和  $P_t$  产生中间控制点  $P_m$ , 本文为线性过渡过程。令  $t=0$ , 利用式(11)计算  $P_m$ 。

$$P_m(t) = (1-t) \times P_s(t) + t \times P_t(t) \quad t \in [0,1] \quad (11)$$

(3) 将  $P_s$  和  $P_m$  分别作为源控制点和目标控制点对源图像  $I_s$  进行图像变形,得到图像  $I_{sw}$ ; 将  $P_t$  和  $P_m$  分别作为源控制点和目标控制点对目标图像  $I_t$  进行图像变形,得到图像  $I_{tw}$ 。

(4) 将  $I_{sw}$  和  $I_{tw}$  按式(12)进行图像融合得到中间图像  $I_m$ 。

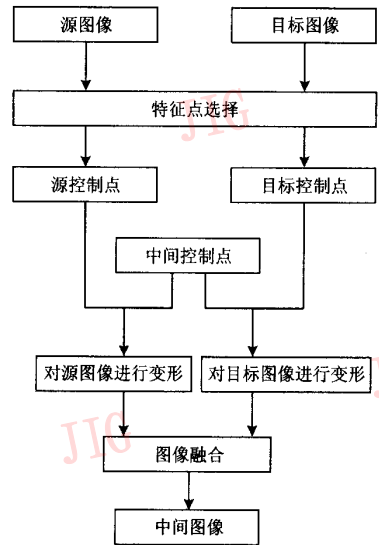


图 2 图像渐变实现过程

Fig. 2 The implementation of image morphing

$$I_m = t \times I_{sw} + (1-t) \times I_{tw} \quad (12)$$

(5) 将  $t$  增加一个变形步长  $\Delta t$ , 返回步骤(2)。

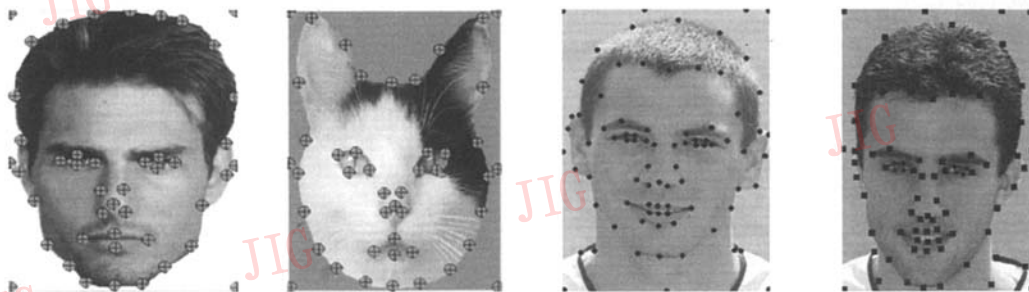
综上,得到一系列介于源图像和目标图像之间的中间过渡图像,完成了图像渐变。

## 5 仿真实验

本文算法对灰度图像和彩色图像均可进行渐变,两者区别仅在于彩色图像在进行灰度插值的时候需要分别对 RGB 3 个通道进行。而特征点选择和空间映射完全一样。故彩色图像变形的时间和空间开销远小于灰度图像变形的 3 倍。

图 3 为特征点选择示意图。其中在人脸的眼睛、鼻子和嘴巴等细节部位特征点较多,其余部分特征点较少。图像边界上的辅助控制点是为了稳定变形图像的边界,这些辅助控制点由程序自动产生。变形结果中超出图像边界的少数像素点用图像背景色代替。图 4 为本文算法得到的灰度图像渐变过程当中比较有代表性的几幅画面。图 5 为本文算法得到的彩色图像渐变过程当中比较有代表性的几幅画面。

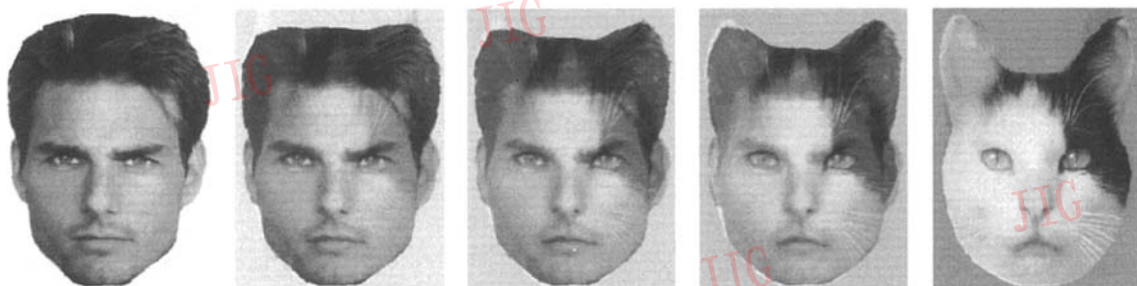
实验所用图像大小为  $352 \times 268$ , bmp 格式,硬件配置为 PIV-2.0GHz 处理器,512MB 内存。在 MATLAB7.0.1 环境下灰度图像变形时间约 1s,彩色图像变形时间约 1.3s,在 VC++6.0 下灰度图像变形时间约 50ms,彩色图像变形时间约 70ms。



(a) 人脸特征点 (b) 猫脸特征点 (c) 运动员 1 特征点 (d) 运动员 2 特征点

图 3 特征点分布图

Fig. 3 The location of feature points



(a) 源图像 (b) 中间图像 1 (c) 中间图像 2 (d) 中间图像 3 (e) 目标图像

图 4 从人到猫的渐变

Fig. 4 The morphing from a man to a cat



(a) 源图像 (b) 中间图像 1 (c) 中间图像 2 (d) 中间图像 3 (e) 目标图像

图 5 两个运动员的渐变

Fig. 5 The morphing from a player to another

## 6 结论与展望

从实验过程及结果可看出:

(1) 本文所提出的方法使用灵活,为了调整变形的细节,操作者可以随意增加、减少控制点的数量或者调整控制点的位置,而无需修改算法(程序实

现时也只需要调整参数即可),这是本文所引文献中的图像变形方法不具备的优点。

(2) 无论是对灰度图像还是彩色图像进行变形,渐变过程均平滑自然、变形图像边界稳定且每幅中间图像仍有良好可视性;

进一步的工作:

(1) 对插值算法进行优化,尽量减少变形时间

以达到“实时”的效果；

(2) 结合人脸特征自动定位技术,尽量减少或避免特征点的手工选择；

(3) 将本文变形算法应用于人脸动画中,合成人脸动画所需的各种口型以及丰富的表情。

### 参考文献 (References)

- 1 Wolberg G. Digital Image Warping [M]. Los Alamitos MA, USA: IEEE Computer Society Press, 1990.
- 2 Wolberg G. Image morphing: a survey [J]. The Visual Computer, 1998, 14(8/9): 360 ~ 372.
- 3 Yang Jin-zhong. An image warping method based on control points and its applications [J]. Journal of Image and Graphics, 2001, 6A(11): 1070 ~ 1074. [杨金钟. 基于控制点的图像变形方法及其应用 [J]. 中国图象图形学报, 2001, 6A(11): 1070 ~ 1074.]
- 4 Beier T, Neely S. Feature-based image metamorphosis [J]. Computer Graphics, 1992, 26(2): 35 ~ 42.
- 5 Reissfeld D, Arad N, Dyn N, et al. Image warping by radial basis functions: application to facial expressions [J]. Computer Vision Graphics and Image Processing: Graphical Models and Image Processing, 1994, 56(2): 161 ~ 172.
- 6 Arad N, Reissfeld D. Image warping using few anchor points and radial functions [J]. Computer Graphics Forum, 1995, 14(1): 35 ~ 46.
- 7 Pan Jian-jiang, Zheng Jian-min, Yang Xun-nian. Locally constrained deformation for digital images [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2002, 14(5): 385 ~ 393. [潘建江, 郑建民, 杨勋年. 图像的局部约束变形技术 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(5): 385 ~ 393.]
- 8 David T. Sandwell biharmonic spline interpolation of GEOS-3 and SEASAT altimeter data [J]. Geophysical Research Letters, 1987, 14(2): 139 ~ 142.